全国第二届部分高校研究生数模竞赛

题 目　**空中加油问题的模型与分析**

摘　　　要：

本文通过建立了 3 种简化的空中加油模型，并且先通过简单的理论分析给出了一个 $O(\ln n)$ 的上界和 $\Omega(\frac{1}{3\ln 3}\ln n)$ 的下界的结论，然后通过细致的分析我们给出了紧的上下界，即作战距离和出动飞机数目的关系如下 $r_n = R_n = \Theta(\frac{1}{2}\ln n)$。同时我们还给出了当 $n \to \infty$ 时两种模型的作战半径的渐进等价性的关系。最后我们通过这些模型对于具体的问题给出了基地选址，最短航线和最少飞机数等最佳作战方案。

在本文第二章第二部分给出了问题 1 的解答；问题 3 对于比较小的 n 在第二章第三部分给出了解答；第三章和第四章对于问题 2 以及问题 3 中 $n \to \infty$ 情况下给出了解答；问题 4 和问题 5 的解答分别在第五章第一、二部分中给出。

参赛队号　1008

参赛密码 ＿＿＿＿＿＿
（由组委会填写）

目录

第一章 背景简介

最近的几次战争证明，空中加油技术的成功运用是战争取胜的重要因素之一。它可以使作战飞机加大航程和作战半径，增加载弹量，延长留空时间，完成它本来不能完成的任务。

作战中空中加油任务的规划是比较复杂的问题，为了配合作战行动，应制定周密的、最优的空中加油计划和空中加油方案。空中加油方案主要包括有加油次数、加油时间、每次的加油量；加油机和受油机相互协同的方式；加油机驻地分配、起飞时刻、降落机场等。由于实际的空中加油问题要考虑到如下一些因素[6][5]：

- 受油机的燃料消耗情况 。如果补充过早，对受油机的航程增加不大；补充过晚，出现异情况将难以处理。
- 加油机的燃油消耗情况。加油点的选择要考虑到加油机往返和自身的燃油消耗，要保证完成任务后能够有足够的燃油返回机场降落。
- 加油次数。远距离作战时，需要多次空中加油，每个加油点都要合理安排，这样既能获得必要的航程，又可以减少加油机的出动次数。
- 加油区域的限制。考虑到制空权，天气等多方面的因素，加油机能飞行的空域有一定的限制。

但为了给出优化的作战方案，我们需要给出一些简化的模型来求解。

本文第二章根据不同的简化程度建立了三个模型（其中问题 1、2 归类于模型 1，问题 3 归类于模型 2，问题 4、5 归类于模型 3），并对n很小的时候，计算了模型 1、2 的具体实例（即问题 1 和问题 3 一部分的解答）。第三章简单分析了模型 1、2 条件下的渐进性质，证明在渐进意义下两个模型的等价性。第四章改进了第三章中关于模型 1、2 渐进作战半径的上下界，得到了除了一个高阶加数的紧的解，从而回答了问题 2 和问题 3 剩余的部分。第五章中对于模型 3 进行了更详细的分类，对其中第一类（问题 4 所属）利用前面结论得到了紧的渐近解；对第二类问题的实例，即问题 5，根据前面的部分结果进行具体计算，得到了较好的方案。

第二章 模型建立

一. 模型和基本假设

定义：主机的最大作战半径是指主机在 n 架辅机的协助下所能飞到的（并安全返回）离基地 A 的最远距离。

首先我们对加油作战做如下一些基本假设：

1. 主机（作战飞机）和辅机（加油机）的速度和单位时间的耗油量均相同且为常数，油箱装满油后的最大航程均为 L(公里)。
2. 辅机可以对主机加油，辅机之间也可以互相加油。
3. 所有的飞机在完成任务后都要求返回基地。

在上述基本假设下，从简单到复杂，我们考虑了如下 3 个模型来刻画空中加油问题：

模型 1：为了简化实际问题，在基本假设的基础上我们再增加如下的一些假设：

- 假设飞机垂直起飞、垂直降落、空中转向、在地面或空中加油的耗时均忽略不计。
- 每架飞机只起飞一次。
- 只有一个空军基地。

对于这个模型，我们记主机的作战半径为 r_n。

模型 2：扩展一下模型 1，在基本假设的基础上我们增加如下一些假设：

- 每架辅机可以多次上天
- 辅机从机场上空降落及在地面检修、加油、再起飞到机场上空的时

间相当于飞行 $L/12$ 的时间。

- 飞机第一次起飞、转向、在空中加油的耗时仍忽略不计。
- 只有一个空军基地。

对于这个模型，我们记主机的作战半径为 R_n。

模型 3：在模型 2 的基础上继续扩展。我们在基本假设的基础上增加如下一些假设：

- 每架辅机可以多次上天。
- 辅机从机场上空降落及在地面检修、加油、再起飞到机场上空的时间相当于飞行 $L/12$ 的时间。
- 飞机第一次起飞、转向、在空中加油的耗时仍忽略不计。
- 有多个空军基地，辅机可以在任一基地待命，可多次起飞，且可在任一基地降落。

对于这个模型，我们设主机的作战半径为 R_n^*。

二. 最优方案举例（模型 1）

✓ n=1 的情况

给定 r_1 的作战方案为：由辅机和主机同时从基地起飞至 $\frac{L}{3}$ 处，此时由辅机将主机加满油从而剩下 $\frac{1}{3}$ 的油恰好回到基地；而主机在装满油之后向前再飞 $\frac{L}{3}$，亦即飞至 $\frac{2L}{3}$ 时开始返回并恰好能够回到基地。由于由辅机晚起飞而接主机回基地的方案跟该方法对称，不再单独考虑。因此容

易看出此方案也为最优方案，故$r_1=\dfrac{2}{3}$。图 2.1 详细描述了该作战方案[1]。

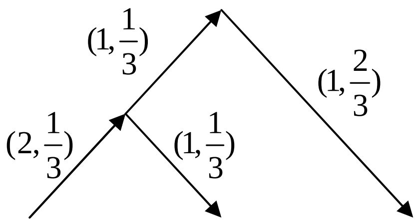


图 2.1 r_1的作战方案示意图

✓ n=2 的情况

作战方案见图 2.2，可得$r_2\ge\dfrac{5}{6}$。

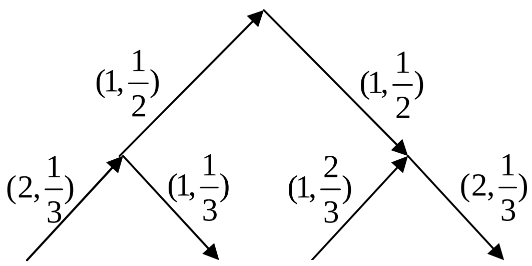


图 2.2 r_2的作战方案示意图

✓ n=3 的情况

作战方案见图 2.3，可得$r_3\ge\dfrac{11}{12}$。

[1] 其中图的水平方向为时间方向，竖直方向为离开基地的距离，每条边箭头方向表示飞机飞行方向，数对前项表示该批同时飞行飞机的数量，后项表示此段飞行的距离，所有的边的斜率均为L或$-L$，即时间单位为飞行L所需时间；另外图中并未区分主机和辅机，所示飞行距离最远的一家飞机即为主机；本文中之后所用的图如未加说明同此例。

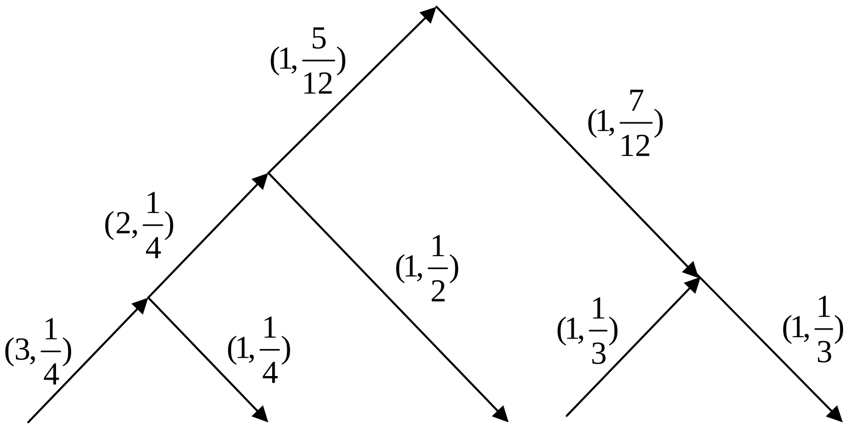


图 2.3 r_3 的作战方案示意图

✓ n=4 的情况

作战方案见图 2.4，可得 $r_2 \geq 1$。

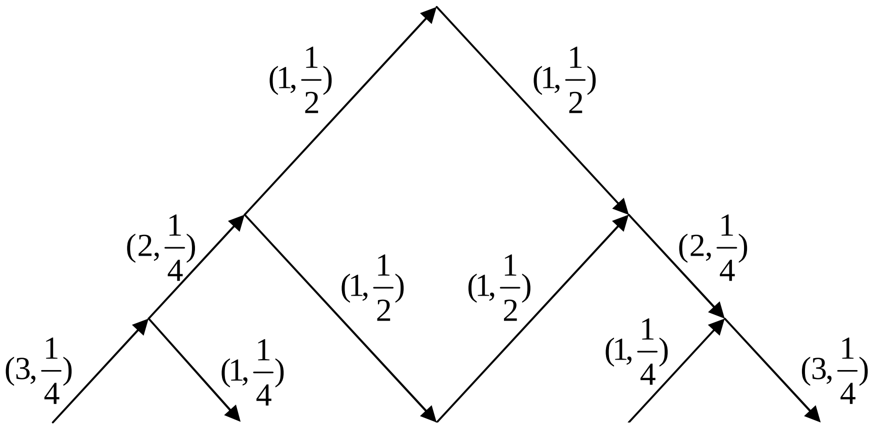


图 2.4 r_4 的作战方案示意图

三． 最优方案举例（模型 2）

✓ n=1 的情况

给定 R_1 的作战方案为：由辅机和主机同时从基地起飞至 $\frac{L}{3}$ 处，此时由辅机将主机加满油从而剩下 $\frac{1}{3}$ 的油恰好回到基地；主机向前飞行 $\frac{L}{2}$ 然后返回，而辅机回到基地后在 $\frac{L}{3}$ 时间后再次出发并在飞行 $\frac{L}{3}$ 时和主机相

遇，主机油恰好用完；两机公用剩余的$\frac{1}{3}$的油回到基地。简单的分析可以得到$R_1=\frac{5}{6}$。该作战方案见图 2.5。

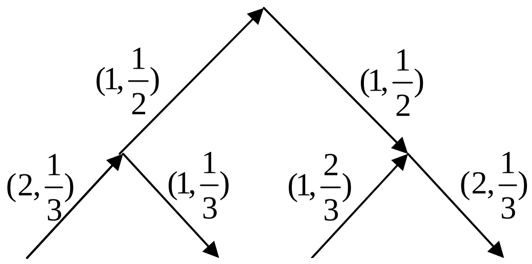


图 2.5 R_1的作战方案示意图

- n=2 的情况

  作战方案见图 2.6，可得$R_2\geq 1$。

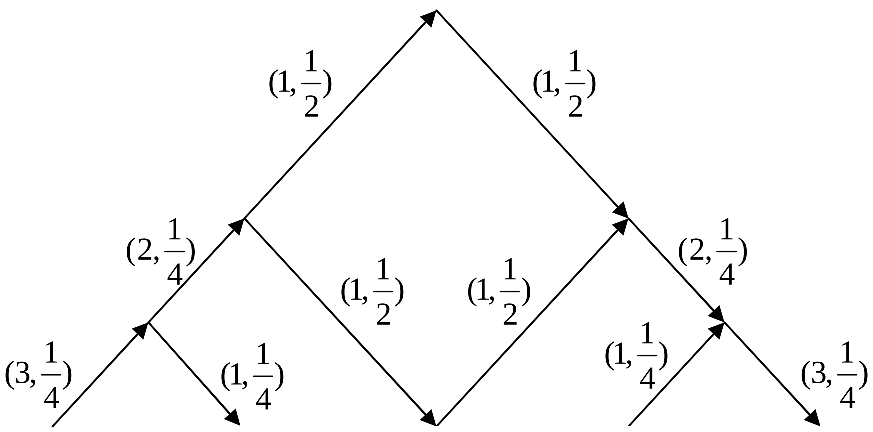


图 2.6 R_2的作战方案示意图

- n=3 的情况

  作战方案见图 2.7，可得$R_3\geq\frac{11}{10}$。

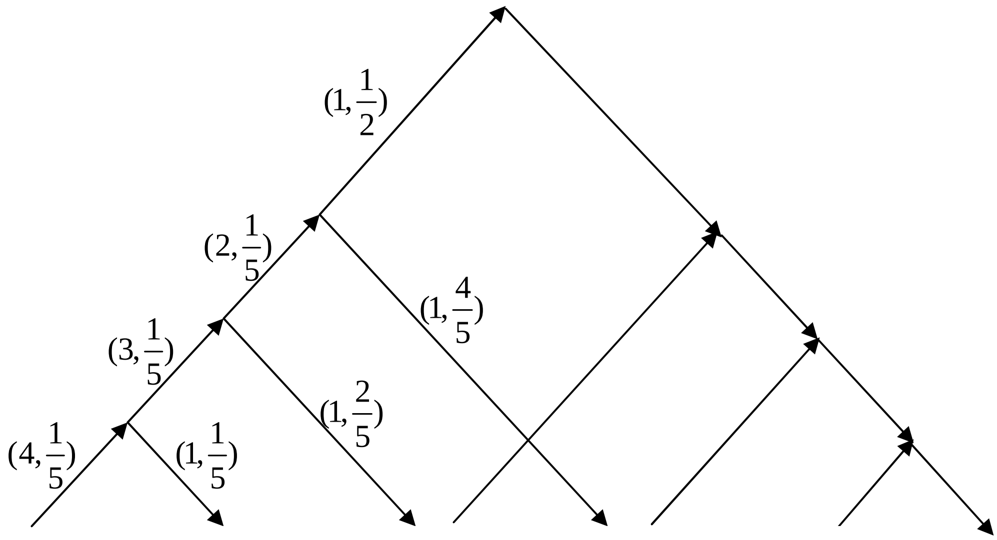


图 2.7 R_3 的作战方案示意图（其中右侧未标记部分跟左侧完全对称）

✓ n=4 的情况

作战方案见图 2.8，可得 $R_4 \ge \dfrac{109}{90}$。

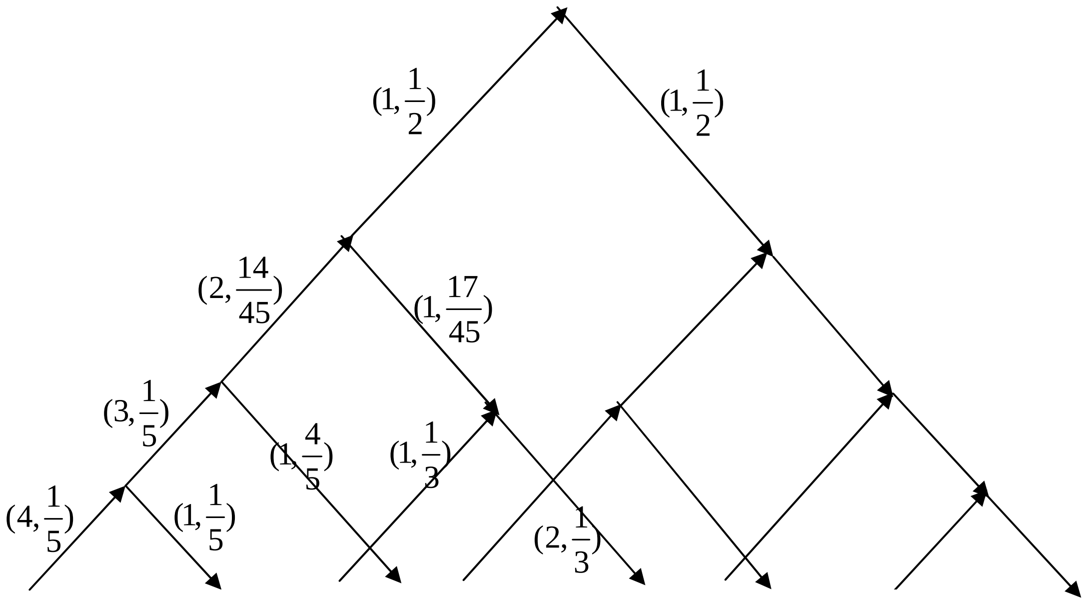


图 2.8 R_4 的作战方案示意图（其中右侧未标记部分跟左侧完全对称）

第三章 r_n 和 R_n 的简单渐近性质和等价性证明

在上一章，我们给出模型 1 和模型 2 在 n 比较小的时候（$n=1,2,3,4$）的作战半径 r_n 和 R_n 的下界（即分别给出具体可行的作战方案）。下面我们首先给出模型 1 在 $n\to\infty$ 时 r_n 的下界 $\Omega\left(\frac{L}{3\ln 3}\ln n\right)$ 和模型 2 R_n 的上界 $O(L\ln n)$，根据两种模型定义之间的直接关系可知得到的界对另一个模型同样成立。然后我们将证明对于模型 1 和模型 2，当 $n\to\infty$ 时的作战半径的渐进系数也相等。（在下一章，我们将会把上下界前面的系数也改进至匹配，也就是给出紧的 r_n 和 R_n 的界）

一. r_n 和 R_n 的简单下界

为了得到 r_n 的简单下界，我们只需给出对于 n 的作战方案的一个构造方法。由模型 1、2 的定义可知该下界同样是 R_n 的下界。

定理 3.1 模型 1 的渐近飞行距离满足： $r_n=\Omega\left(\frac{L}{3\ln 3}\ln n\right)$。

证明：我们用归纳法证明该结论。当 $n=0$ 的时候显然成立。

假设对于所有 n 小于 N 的情况 $r_n\geq\frac{L}{3\ln 3}\ln n$ 均成立。

当 $n=N$ 时，我们已知存在 $N/3$ 的辅机的作战方案 S，使得飞行距离不小于 $\frac{L}{3\ln 3}\ln\left(N/3\right)$。我们构造对于 N 的作战方案 S' 如下：对于作战方案 S 中每次需要出发飞机时，我们在 $L/3$ 时刻前从基地出发两架飞机，并在飞到 $L/3$ 的时刻将其中一架加满油而另一架返回基地；对于该作战方案中辅机需要在基地降落的时刻，我们在 $L/3$ 时刻前从基地出发一架辅机并恰好能将那架飞

机接回基地；对于所有飞过$L/3$距离的$N/3$架飞机令其模拟作战方案S中的行为。这样为了实现S'需要在$L/3$处满油前进的飞机个数为$N/3$，剩余用于为这些飞机加油的辅机个数为：$2N/3$，恰好为$N/3$架飞机接送加油。

这样很明显可以看出，我们用N架辅机的作战半径至少为：

$r_N \geq \dfrac{L}{3\ln 3}\ln\dfrac{N}{3}+\dfrac{L}{3}=\dfrac{L}{3\ln 3}\ln N$，证毕。□

二. r_n和R_n的简单上界

对于模型 2 可以比较容易得到一个$R_n = O(L\ln n)$的上界，同时由模型之间的关系我们知道它直接隐含了$r_n = O(L\ln n)$。

定理 3.2　模型 2 的作战半径满足：$R_n = O(L\ln n)$。

证明：这里我们用数学归纳法首先证明$R_n \leq \sum_{i=1}^{n}\dfrac{L}{i}$。

对于$n=1$的情况，很容易得到$R_1 = \dfrac{5L}{6} < L$。假设对于$n=k$时上式成立，即$R_k \leq \sum_{i=1}^{k}\dfrac{L}{i}$；那么当$n=k+1$时，此时设与战斗机同时起飞的飞机共有 m 架（$m \leq n$），此$m$架飞机中第一批返航的飞机有$j$架，易知剩下的飞机一定都是载满油。不然可以让这$j$架飞机提前返航，剩下的飞机飞到这里时的载油数量一定比现在多，因为这j架飞机多飞这些距离的油可以节省下来。而这 j 架飞机最多飞行$\dfrac{j}{m+1+j}L$的距离就需要返航（其实此时它们已经没有燃油，不能返回基地，因为此处是求上界，所以放松了对返回基地的约束限制），剩下的$(m+1-j)$飞机都是载满油的，由于从机场后起飞的飞机永远都追不上第一次起飞的飞机，所以这些飞机和刚从机场起飞的情况一样，可以利用归纳假设他们最多可再飞行R_{m+1-j}的距离，所以总共飞行的距离

$$R_{m+1} \le R_{m+1-j} + \frac{j}{m+1+j} L \text{。}$$

所以

$$R_{m+1} \le \sum_{i=1}^{m+1-j} \frac{L}{i} + \frac{j}{m+1+j} L$$

$$\le \sum_{i=1}^{m+1} \frac{L}{i}$$

因此，

$$R_{k+1} = R_{m+1} \le \sum_{i=1}^{m+1-j} \frac{L}{i} \text{。}$$

由此证得 $R_n \le \sum_{i=1}^{n} \frac{L}{i}$。

已知 Harmonic 数 $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sim \ln n$，故得 $R_n = O\left(L \ln n\right)$. □

由定理 3.1 和 3.2 直接可以得到如下两推论

推论 3.3 $r_n = \Theta(\log n)$。

推论 3.4 $R_n = \Theta(\log n)$。

三. 模型 1、2 渐近性质的等价性

我们已经得到 r_n 和 R_n 的随 n 增长的阶都是 $\Theta(\log n)$。下面我们将要证明 R_n 与 r_n 的渐近系数相等。

定理 3.3

1. 如果存在常数 k_1，使得 $r_n \le k_1 \ln n$，则存在常数 c_1，满足

$$R_n \le k_1 \ln n + c_1 \ln \ln n$$

2. 如果存在常数 k_2，使得 $R_n \ge k_2 \ln n$，则存在常数 c_2，满足

$$r_n \le k_2 \ln n - c_2 \ln \ln n$$

证明：对于模型 2 中，如果有 n 架辅机，由推论 3.4 可知存在常数 a 使得

$R_n \le a\ln n$。因此全部飞机从出发到回到基地的总时间为$2R_n \le 2a\ln n$。由于每一架辅机在基地降落到重新起飞的时间间隔不小于$L/12$，故每架辅机起飞的总次数不超过$\dfrac{24a\ln n}{L}$。故所有辅机使用的机次之和不超过$\dfrac{24an\ln n}{L}$。因此，假如考虑模型 1 的情况，我们可以用不超过$\dfrac{24an\ln n}{L}$架的辅机来模拟模型 2 的战斗方案。

如果存在常数k_1，使得$r_n \le k_1\ln n$，则存在常数c_1, 满足：

$$
\begin{aligned}
R_n &\le r_{\frac{24an\ln n}{L}} \le k_1\ln(\frac{24an\ln n}{L}) \le k_1(\ln n + \ln\ln n + \ln(\frac{24a}{L})) \\
&\le \mathrm{k}_1\ln n + c_1\ln\ln n \quad 。
\end{aligned}
$$

类似的，假如对于模型 1 中，如果有n架辅机，由推论 3.3 可知存在常数a使得$r_n \le a\ln n$。因此全部飞机从出发到回到基地的总时间为$2r_n \le 2a\ln n$。现在用模型 2 来模拟，即飞回的飞机休整$L/12$时间仍可以重新出发，则每架辅机起飞的总次数不超过$\dfrac{24a\ln n}{L}$，故仍需要的辅机个数不小于$\dfrac{nL}{24a\ln n}$。因此，我们可以用不少于$\dfrac{nL}{24a\ln n}$架的辅机来模拟模型 1 的战斗方案。

如果存在常数k_2, 使得$R_n \ge k_2\ln n$, 则存在常数c_2, 满足：

$$
\begin{aligned}
r_n &\ge R_{\frac{nL}{24a\ln n}} \ge k_2\ln(\frac{nL}{24a\ln n}) \ge k_2(\ln n - \ln\ln n - \ln(\frac{24a}{L})) \\
&\ge \mathrm{k}_1\ln n + c_1\ln\ln n \quad 。
\end{aligned}
$$

又因为r_n不会大于R_n, 定理中的两个不等式实际上证明了R_n与r_n的渐近系数相等。 □

第四章 r_n 和 R_n 的最优渐近分析

这一章在前一章定理 3.3 结论的基础上，严格的给出模型 1 和 2 下，当 n 趋向无穷大时作战半径 r_n 与 R_n 的渐进趋势。为表述的方便起见，在本章的分析中，假设每架飞机的载油量即飞行的最大距离是单位 1。

一．模型 1 中 r_n 的上界

本节证明在只允许单次起飞的模型 1 中，当有 n 架辅机时 r_n 有上界 $1+\frac{1}{2}\ln(n+1)$，表示以下定理：

定理 4.1 $r_n \le 1+\frac{1}{2}\ln(n+1)$。

证明：假设主机最远可飞到 r_n 处并返回，对于原点 o 到终点 r_n 这段路程中任一位置 x（x 代表这一点到原点的距离），用 $f(x)$ 代表在位置 x 与 r_n 中需要消耗油的数量。考虑距离 x 一个小量 Δ 处 $f(x-\Delta)$ 的数值。因为 $f(x)$ 的油需要经由 $x-\Delta$ 处运到 x 处，同时为了运送这些油，至少需要在 $x-\Delta$ 与 x 之间 $f(x)$ 次发往返飞行（每架飞机至多能运送 1 单位的油量），至少消耗油量 $f(x)\cdot 2\Delta$，所以

$$f(x-\Delta) \ge f(x) + f(x)\cdot 2\Delta \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

将原点 O 与点 r_n-1 之间 N 等分，记 $\delta = \dfrac{r_n-1}{N}$，根据**(4.1.1)**可得

$$f(r_n-1-\delta) \ge (2\delta+1) f(r_n-1),$$

$$f(r_n-1-2\delta) \ge (2\delta+1) f(r_n-1-\delta)$$

$$f(r_n-1-3\delta) \ge (2\delta+1) f(r_n-1-2\delta)$$

$$\cdots$$

$$f(0) = f(r_n-1-N\delta) \ge (2\delta+1) f(r_n-1-(N+1)\delta)$$

上面 N 个不等式两端都是正数，将其两边分别相乘，可得 $f(0)\ge(2\delta+1)^N f(r_n-1)$。注意到 $f(0)\le n+1$，且 $f(r_n-1)\ge 1$，所以

$$n+1\ge(2\delta+1)^N=(2\delta+1)^{\frac{r_n-1}{\delta}}$$

两端取对数并整理得 $r_n\le 1+\dfrac{\delta}{\ln(2\delta+1)}\ln(n+1)$，因为上式对任意 $\delta>0$ 成立，且 $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\delta}{\ln(2\delta+1)}=\dfrac{1}{2}$。所以

$$r_n\le 1+\tfrac{1}{2}\ln(n+1)。\quad\square$$

二．模型 2 中 R_n 的下界

本节通过构造一种飞行方案改进 R_n 的下界，具体表示为如下定理：

定理 4.2 存在一个包含无穷多个正整数的集合 M，当辅机的数量 n 在 A 中趋于无穷大时，R_n 与 $\frac{1}{2}\ln n$ 的比值无限趋近于 1。即

$$\lim_{n\in M,n\to\infty}\frac{R_n}{\frac{1}{2}\ln n}=1 \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

证明：构造的飞行方案如图 4.1 所示

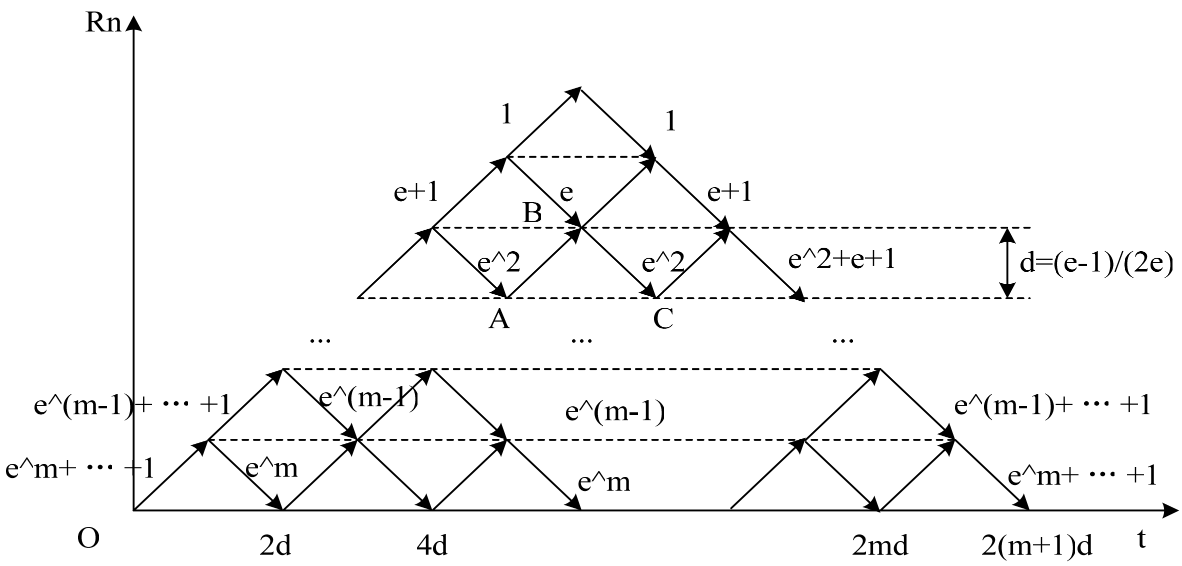
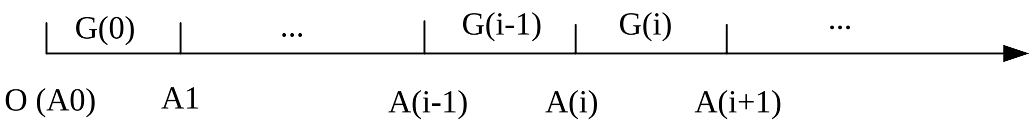


图4.1 构造的一个飞行方案

下面具体说明如何此飞行方案的构造方法。取定一常数$e>1$，正整数m，令$d=\frac{e-1}{2e}$。构造的主要思路是，考虑从出发点O起， $m+1$个长度为d的区间构成一长为$(m+1)d$的直线段。在从原点起的第i个区间$A_{i-1}A_i$上$(1\le i\le m+1)$，有e^{m+1-i}架飞机在一起构成的机群G_{i-1}不停地来回巡航。对任意区间$A_{i-1}A_i$上巡航的机群G_{i-1}($2\le i\le m$，即除去两端的两个区间)，此飞行方案要求：



G_{i-1}在A_{i-1}和A_i两点间不停地往返直线飞行。 当G_{i-1}到达A_i时，为恰好到达A_i的机群G_i的所有飞机加满油，然后G_{i-1}返回向A_{i-1}飞行，G_i向A_{i+1}飞行。G_{i-1}可以到达A_{i-1}，在到达A_{i-1}时，恰好到达A_{i-1}的机群G_{i-2}为G_{i-1}的所有飞机加满油， 然后两个机群继续巡航。 因为$e^{m+1-i}=2e^{m+1-i}d+e^{m+1-i}$，参数$e,d$的设置使得上面的要求可以满足。以$O$为一个端点的区间$A_0A_1$上的机群$G_0$同样满足上面要求，但是每次落地加油，由另一批可以起飞数量相等的机群起飞作为新的G_0。最后一个区间A_mA_{m+1}上的机群G_m只有主机一架，它只做一次A_m到A_{m+1}的往返，返回A_m时由其前面区间上的辅机群G_{m-1}为其加油（并不加满，只要够主机飞到下一个节点，后面我们给出验证所有辅机也可以飞到下一个节点)，然后同辅机群一起飞到A_{m-1}点，此时刚刚到达A_{m-1}的辅机群G_{m-2}，为其前面区间上的所有辅机群加上刚好够达到下一个顶点的油量，然后一同飞向A_{m-2}。以此类推，最后所有飞机飞回出发点。因为对$1\le k\le m$，有

$$e^k d+(e^k+e^{k-1}+...+1)d \le e^k$$ 。

所以上述方案可以使所有飞机飞回出发点。最后说明开始时的飞行方案。开始时刻$1+e+e^2+...+e^m$架飞机从出发点一同起飞（包括主机），飞到顶点A_i时（$1 \le i \le m$），由其中的e^{m+1-i}架辅机将其余飞机加满油，然后这e^{m+1-i}架辅机组成机群G_{i-1}反向飞行，开始在区间$A_{i-1}A_i$上的巡航，其余的$e^{m-i}+e^{m-i}+...+1$架飞机继续向前飞行。

因为对于$1 \le i \le m$，有

$$(1+e+e^2+...+e^{m-i+1})d+e^{m-i+1}d \le e^{m-i+1}$$

所以可以把所有机群包括主机送到相应得区间。

下面分析在可以多次起飞的模型下，上面的方案一共需要多少架辅机。首先在开始时刻共有$1+e+e^2+...+e^m$架飞机起飞，除了机群G_0外，其余的飞机都只起飞一次。　由图 4.1 可知，地面上的飞机的起飞间隔是$2d$的距离，由于飞机着陆后的等待时间至少是$\frac{1}{12}$，所以$\frac{1}{12\cdot 2d}+2$批飞机群作为机群G_0即可满足条件。所以

$$n=1+e+e^2+...+e^{m-1}+(\tfrac{1}{12\cdot 2d}+2)e^m=\frac{25e-12}{12(e-1)}e^m-\frac{25}{12(e-1)}$$

这样可求出在上述方案下的作战半径L_n：

$$L_n=(m+1)d=(\log_e \frac{12(e-1)}{25e-12}(n+\frac{25}{12(e-1)})+1)\frac{e-1}{2e} \quad (3.3.1)$$

对于一个固定的任意常数$e>1$，当$m \to \infty$时，$n \to \infty$，由(3.3.1)可知，

$$\frac{L_n}{\frac{e-1}{2e\ln e}\ln n} \to 1$$，即

$$L_n \approx \frac{e-1}{2e\ln e}\ln n \qquad (4.2.2)$$

因为$\lim_{e\to 1}\frac{e-1}{2e\ln e}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{L_n}{\frac{1}{2}\ln n}$可无限趋向于1。

上面的讨论并没有考虑每个机群的飞机的个数必须是整数的限制。下面说明在这样的限制下，上述方案的作战半径L_n依然可以满足$\frac{1}{2}\ln n$的渐进关系。记机群G_i里飞机的个数是$|G_i|$，从方案可行性的证明中可以发现，只要满足

$$|G_{i-1}|\geq e|G_i| \qquad (4.2.3)$$

对$1\leq i\leq m$成立，上述方案即可实现。因为$|G_m|=1$，所以可以取$|G_i|$是整数使得(4.2.3)满足，且$|G_i|\leq 1+e+...+e^{m-i}$ 对$0\leq i\leq m$成立。

类似上面的分析，此时有

$$\begin{aligned} n &\leq 1+(1+e)+...+(1+e+e^2+...+e^{m-1}) \\ &\qquad +(\tfrac{1}{12\cdot 2d}+2)(1+e+e^2+...+e^m) \\ &\leq \frac{25e^{m+2}}{12(e-1)^2}\ , \end{aligned}$$

作战半径为

$$L_n=(m+1)d\geq(\log_e\frac{12(e-1)^2 n}{25}-1)\frac{e-1}{2e} \qquad (4.2.4)\ ;$$

类似地，对于一个固定的常数$e>1$，当$m\to\infty$时，$n\to\infty$，由(4.2.4)可知，

$$\frac{L_n}{\frac{e-1}{2e\ln e}\ln n}\to 1,$$

即

$$L_n\approx\frac{e-1}{2e\ln e}\ln n。$$

所以当$e\to 1$时，$\frac{L_n}{\frac{1}{2}\ln n}$可无限趋近于1。 □

三． 主要结论

综合定理 3.3，定理 4.1 和定理 4.2，我们可以得到如下定理，也是本文最重要的理论结果：

定理 4.3. 当n趋向于无穷大时，R_n与r_n满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{\frac{1}{2}\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{\frac{1}{2}\ln n}=1。$$

第五章 模型3实例求解和渐进性质分析

在第二章中我们所建立的模型三有两种不同类型：

- **模型 3.1**：给定作战方向$\vec{d}$、辅机数量n和待建基地数量k，求解在基地选址最优情况下的最远作战半径。这里在事先说明k的情况下我们仍然用记号R_n^*表示。
- **模型 3.2**：给定作战方向$\vec{d}$、辅机数量n和已建好的k个基地，求解最优的作战半径。由于该问题比较复杂，我们只对一个具体的问题（问题 5）加以求解。

下面我们将对这两种不同问题分别求解。

一. 问题 4 的求解和模型 3.1 的渐近性质分析。

先来看问题 4：主机从A基地向选定方向$\vec{d}$出发，要求主机回到并只能在A降落，另有 2 个待选址基地A_1，A_2（不失一般性我们假定距离满足$\left|AA_1\right| \le \left|AA_2\right|$），共有$n$架辅机，可以从任一个基地出发和起落，每次降落到再次起飞需要$L/12$的时间，求解主机在$\vec{d}$方向飞出的最远距离R_n^*。

声明 4.1：在最优情况下，A_1，A_2应选在$\vec{d}$方向上。

这是因为如果A_1不在指定方向上时，所有从A_1出发的辅机到主机航线上的加油位置所需要飞的距离一定大于将A_1设在A_1在$\vec{d}$上的投影点时辅机的飞行距离。类似的讨论对A_2也成立。因此A_1，A_2的位置由它们到A的距离唯一确定。

声明 4.2：$R_n^* \le R_n + \left|AA_2\right|$。

因为将主机的飞行轨迹分成从A到A_2和从A_2到R_n^*两段，则第二段的最

远距离不超过主机从A_2起飞在n架辅机加油飞至的最远距离即R_n。

推论 4.3：$R_n^* \le 5R_n + 2L$

证明：首先假设A有n架辅机，则其最远飞行距离为$R_n + L$（加上L是因为主机可能飞到最终位置完全没有油，最多比R_n多L的距离）。而从A_1出发的辅机要想将主机接住可以支持的最远距离不可能超过R_n。从A_1到A_2的距离类似可得，故$\left|AA_2\right| \le 4R_n + 2L$。再由声明二可得。□

最后我们作如下假设：$\left|AA_1\right|$和$\left|AA_1\right|$的距离尽量大从而满足任一架辅机只在其起飞的基地降落，即所有从A出发的辅机都不能在A_1，A_2降落（从A_1，A_2起飞的辅机同样）。该假设的合理性在于，由声明二和前一章的结论，即R_n与飞机个数n呈对数增长趋势，故将飞机集中在A_2或A_1不利于飞行距离的增加。因此我们可以考虑将飞机尽可能“均匀”的放置到三个基地从而最大化R_n^*。

设A、A_1、A_2所配置的辅机的个数分别为n_0、n_1、n_2，我们可以得到以下的结论：$R^*_{n_0+n_1+n_2} \ge R_{n_0} + 2R_{n_1-1} + 2R_{n_2-1}$。如下图所示，作战计划如下：首先由$n_0$架飞机从$A$将主机送到$R_{n_0}$处，然后由从$A_1$起飞的$n_1 - 1$架飞机将主机接到$A_1$所在处，然后由$A_1$剩余的一架飞机给主机加油使其在$A_1$附近盘旋并在大于$L/12$的时间之后使其在$A_1$正上方并加满油；同时其余的$n_1 - 1$加满油起飞开始继续辅助主机向$A_2$基地出发，用类似的方法使主机到达$A_2$上方；然后再从$A_2$出发沿$\vec{d}$飞行$R_{n_2-1}$距离。最后，对称的是主机最终回到起始基地。这样飞行的最大距离恰为：$R_{n_0} + 2R_{n_1-1} + 2R_{n_2-1}$。

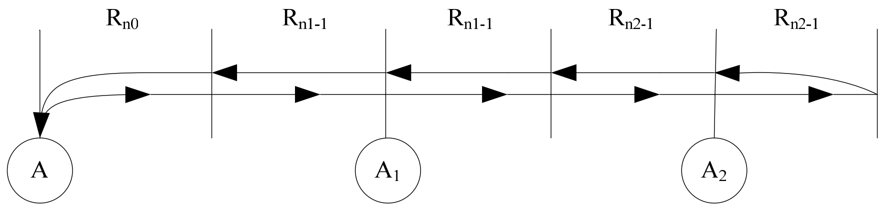


图 5.1 R_n^* 方案示意图

下面，我们通过调整 n_0、n_1、n_2 使得 R_n^* 最优。这里我们利用上一章里得到的关于 R_n 的近似计算公式。为简化起见，我们近似地取 $R_n \approx \frac{1}{2}\ln n$。所以我们所要求解的问题可以写成：

$$\begin{aligned}&\max\ \ f\left(n_0,n_1,n_2\right)=\frac{1}{2}\ln n_0+\ln(n_1-1)+\ln(n_2-1)\\&\text{s.t.}\quad n_0+n_1+n_2=n\\&\qquad\ n_0,n_1,n_2\geq 0\end{aligned}$$

由于对数函数是凹函数，由 n_1 和 n_2 的对称性可知该问题的最优解满足 $n_1=n_2$。将其带入约束方程可得到：$n_0=n-2n_1$，则目标函数可以化成：$f=\frac{1}{2}\ln\left(n-2n_1\right)+2\ln\left(n_1-1\right)$。故由 $f\,'=-\frac{1}{n-2n_1}+\frac{2}{n_1-1}=0$ 条件可以得到 $n_1=n_2=\frac{2n-1}{5}$，$n_0=\frac{n+2}{5}$。得到的最优结果为：

$f=\frac{1}{2}\ln\left(n+2\right)+2\ln\left(2n-6\right)-\frac{5}{2}\ln 5$。此即为问题四的解答。

另外，从 f 随 n 的渐进性质来看，增加两个基地的 $R_n^*=\Omega\left(5/2\ln n\right)$。

和推论 4.3 一起我们得到紧的渐进表达式：$R_n^*=\Theta(\frac{5}{2}\ln n)$，即渐近为 R_n 的 5 倍。

将上面的结果加以推广，容易得到如下定理：

定理 4.4 对于有 k 个待选址基地的模型 3，$R_n^* = \Theta(\frac{2k+1}{2}\ln n)$。

二. 问题五的求解

问题五如下：ABCD 为矩形，AB=4L，AD=2L，A，B，D 为三个基地，主机从 A 起飞到 C 再返回 A，在模型 3.2 的条件下，最快到达并返回和最少辅机架数两种情况下的作战方案。

对于最快完成，肯定是从 A 沿直线飞行到 C 然后直线返航。下面求解最佳的作战方案。我们利用前面得到的 $R_n = O(\frac{1}{2}\ln n)$ 来估计作战方案。矩形的中心点为 O，易知从 A 到 O 的航程的路线离 A 最近，所以由 A 派出加油机进行续航的方案一定最佳，下面考虑从 O 到 C 的航线。因为在这段航线上的每一点离 B 的距离都比离 D 的距离小。所以肯定不会从 D 派出加油机，所以只需要考虑是从 A 派出加油机还是从 B 派出加油机即可。因为 $n = O(e^{R_n})$，为指数形式增长，所以一定要取距离最短的基地起飞加油机，所以我们得到如下的最佳方案：从 A 派出加油机护送到 E 点，然后在 EC 上每隔 $\frac{L}{2}$ 距离就有一架从 B 派出的加油机等候在航线上，让它正好与作战飞机相遇并且加油，这样正好可以使作战飞机顺利飞到 C 点完成任务并且返航。下面来确定 E 点的位置。因为从基地派出一组机群使得可以在距离 r 处可以有一个满载油的加油机和派出一组机群可以使作战飞机飞到 $r+\frac{L}{2}$ 处等价。所以考虑到前面飞机数量与飞行距离的指数增长关系，我们有如下方程：$\overline{AO} + \overline{OE} = \frac{L}{2} + \overline{BE}$，因为已知

$\overline{AB}=4L$，$\overline{BC}=2L$，所以可以利用余弦定理求出$\overline{OE}$，然后从 E 到 C 的路线上每隔$\dfrac{L}{2}$距离就有一架从 B 飞出的满载油的加油机。这样的方案将是在满足最短航线的基础上最少作战飞机的选择。最终求得$\overline{OE}=\dfrac{80-5/4+\sqrt{5}}{251}L\approx 0.323L$。

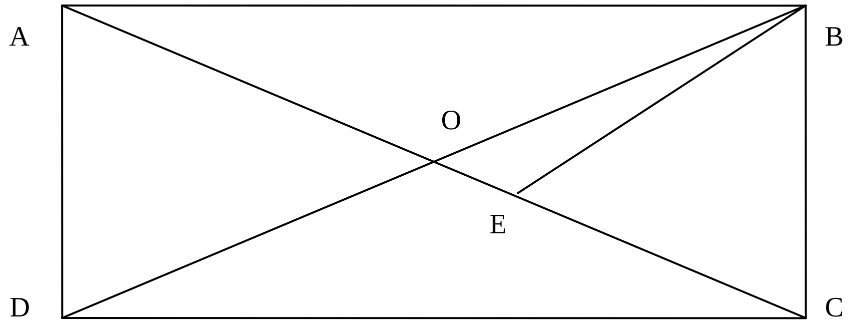


图 5.2 问题 5 方案选择示意图

下面来求解出动最少的辅机的作战方案。由于出动的飞机数量和作战距离成指数关系，所以应该尽量减少作战距离，从而来达到减少作战飞机的目的。而多个空军基地正好提供了减少作战距离的条件。由于在三角形 ABC 内的任何一点到达 A 和 B 两者距离的较大值总是比$2L$大，所以最大的作战距离将大于$2L$，所以我们的方案是作战飞机的沿着 AB 的直线飞行，到达 B 后沿着 BC 的直线飞行抵达 C，返航的路线原路返回。下面具体给出需要多少架飞机的方案。

首先从基地 A 出发动用 58 加油机续航作战飞机到达 AB 的中点 F，然后此时 B 点已经出动的 58 架加油机将作战飞机接到 B 点，由于是多批次起飞的模型所以这 58 架加油机继续将作战飞机护送到任务点 C，返航的过程同理可得，所以最后 A，B 两个基地总共动用了 116 架加油机执行这次任务。

具体如何用 58 架加油机护送作战飞机飞行$2L$的过程如图 5.3 所示：图中每条边上的数字表示飞过此处的飞机数量（包括作战飞机），最上面一层的距离

为$\frac{1}{2}$，最下面一层的距离为$\frac{1}{6}$，当中每层的距离都为$\frac{1}{3}$。每一条斜率为正的斜线上的数代表相应时刻远离出发点飞行的飞机数，斜率为负的斜线上的数代表相应时刻向出发点飞行的飞机数，在每个交点处，刚返回到交点的飞机油已经全部用完，由此交点出发向远离出发点方向飞行的飞机已经被其他飞机（刚刚由原点到达次顶点的飞机）加满油。 由发点到达此顶点的飞机中以相应的一部分数量（当距离是$\frac{1}{3}$时，数量与需要接的飞机个数相同）把所有回来的飞机接到下一个更接近出发点的顶点，出发飞机中另一部分以一定的比例（当距离是$\frac{1}{3}$时，两架飞机可送出一架满油的飞机并返回）送出一些满油的飞机，其余返回下一个更接近出发点的顶点。由于可以多次起飞，降落的飞机在下一个起飞时刻可以起飞。通过对最下层各时刻需要起飞的飞机数和已降落的飞机数的计算，求得每个顶点最少辅机数量为 58 架，一共需要 116 架辅机。

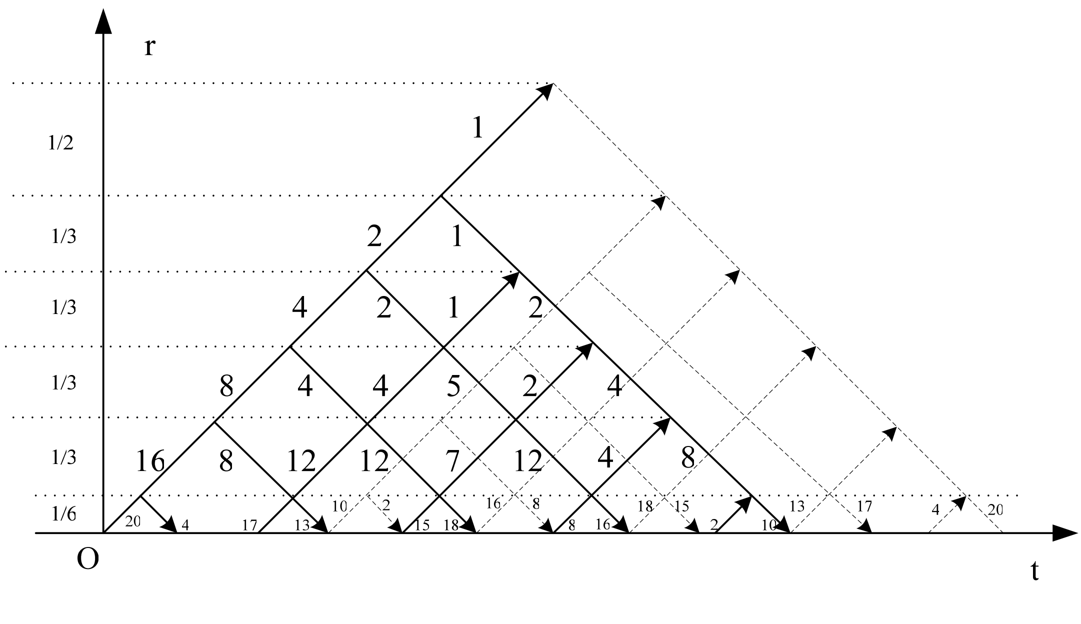


图 5.3 问题五从单顶点出发的作战方案示意图

总结

本文首先分析了飞机空中加油的实际问题并根据不同的简化程度建立了三个逐渐复杂的模型。然后证明了当$n \to \infty$时主机作战半径渐近的等价性，并给出了紧的上下界。在此基础上，对第三个模型进行细分。对于第一种类型，在前面结论的前提下，给出了其渐进作战半径的紧的上下界；对于第二种类型，求解了一个具体的实例，也就是问题 5，利用前面一些结论通过一些分析和计算得到了比较好的作战方案。

参考文献

[1] Pflieger C H. Models for the optimization of air refueling mission [R]. AD-A 262392, 1993.

[2] Hong Guanxin. Investigation on air refueling scheduling. ICAS-92-7.6.2, 1992

[3] Coffman C R. Finding Optimal fuel and mid-air refueling location requirements for C-5A aircraft(R). AD A151 830 7, 1984

[4] Hostler H C. Air refueling tanker scheduling. AD A180 229, 1987

[5] 空中加油调度的研究 洪冠新 金长江 北京航空航天大学

[6] 空中加油问题的最优化研究 孙金标 施克如 王克格 空军指挥学院

[7] AFDD 2-6.2(1999). Air Refueling: Air Force Doctrine Document 2-6.2, Part of Joint Publication 3-17, Joint Tactics, Techniques, and Procedures for air Mobility Operations